コイコライザを持つとは限らない正則圏

Yuto Kawase

2023 年 12 月 6 日

概要

本稿は圏論 Advent Calendar 2023 の 6 日目の記事です．一般のコイコライザを持つとは限らない正則圏の例を与えます．

目次

Terminology 1

1 正則圏 1

2 自由 Abel 群の圏 2

Terminology

$\mathbf{Ab}$	Abel 群と準同型の圏
$\mathbf{Free}(\mathbb{Z})$	自由 Abel 群の成す, $\mathbf{Ab}$ の充満部分圏
$\twoheadrightarrow$	正則エピ射
$\hookrightarrow$	モノ射

1 正則圏

まずは**正則圏** (regular category) の定義を思い出そう．

Definition 1.1. 射 $A \xrightarrow{f} B$ について, pullback

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"] \arrow[dd, phantom, "\text{p.b.}"] & \\ A \arrow[dr, "f"'] & & A \arrow[dl, "f"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

が与えられたとする．このとき, 平行射 $P \underset{\pi}{\overset{\pi'}{\rightrightarrows}} A$ のことを, f の *kernel pair* と呼ぶ．P を $\operatorname{Ker} f$ と書くこともある．単に kernel pair と言ったときは, ある射の kernel pair となっている平行射のことを指す． ♦

Definition 1.2. 圏 $\mathscr{C}$ が**正則**とは, 以下の条件を満たすことを言う．

(R1) 任意の有限極限を持つ．

(R2) 任意の kernel pair がコイコライザを持つ.
(R3) 正則エピが pullback で保たれる.

♦

Example 1.3. **Ab** は正則圏である．より一般に, **Set** 上モナディックな圏は正則圏である.[*1] ♦

正則圏の定義 (R2) は, 任意の平行射について言及している訳ではない．実際, 正則圏であって, 次の条件

(R2*) 任意の平行射がコイコライザを持つ.

を満たさない例が存在する．本稿では, そのような例を構成することを目標にする.

Lemma 1.4. $\mathscr{C}$ を正則圏とし, 充満部分圏 $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ が有限積と部分対象で閉じているとする．このとき, 以下が成り立つ.

(i) $\mathscr{A}$ の射 f について, $\mathscr{A}$ の正則エピであることと $\mathscr{C}$ の正則エピであることは同値.
(ii) $\mathscr{A}$ は正則圏である.

Proof.

(i) $\mathscr{A}$ の射 $A \xrightarrow{f} B$ をとる．仮定より $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ は有限極限で閉じているので, $\mathscr{A}$ における f の kernel pair

$$\operatorname{Ker} f \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B \quad \text{in } \mathscr{A}$$

は, $\mathscr{C}$ においても kernel pair である．よって u, v の $\mathscr{C}$ におけるコイコライザ

$$\operatorname{Ker} f \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} A \overset{p}{\twoheadrightarrow} X \quad \text{in } \mathscr{C} \tag{1}$$

$A \overset{p}{\twoheadrightarrow} X$ をとることができる．その普遍性から, f は次のような一意的な分解[*2]を持つ.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "p"'] & & B \\ & X \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} \quad \text{in } \mathscr{C}$$

i はモノになるので X は B の部分対象であり, 仮定より $X \in \mathscr{A}$ が従う．(1) は $\mathscr{C}$ におけるコイコライザであるが, $X \in \mathscr{A}$ より, $\mathscr{A}$ においてもコイコライザである．したがって

$$f \text{ が } \mathscr{C} \text{ で正則エピ} \iff i \text{ が同型} \iff f \text{ が } \mathscr{A} \text{ で正則エピ}$$

となり, 主張が示された.

(ii) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ は有限極限で閉じているので, (R1) が従う．(i) の証明より $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ は kernel pair のコイコライザで閉じており, (R2) が従う．(R3) も, 既に示した (i) から自動的に従う． □

2 自由 Abel 群の圏

Corollary 2.1. **Free**($\mathbb{Z}$) は正則圏である.

Proof. **Free**($\mathbb{Z}$) $\subseteq$ **Ab** が有限積 (=有限直和) で閉じることはすぐに分かる．さらに, 自由 Abel 群の任意の部分群が再び自由であるという有名事実から, **Free**($\mathbb{Z}$) $\subseteq$ **Ab** は部分対象でも閉じている．よって Lemma 1.4 より従う． □

[*1] 正則圏よりも強く, Barr-exact 圏であることまで言える.[Bor94, Theorem 4.3.5]
[*2] 正則エピ–モノ分解

次の主張は有名事実である．証明は難しいので省略するが，[Sch] 等が参考になる．

Lemma 2.2. **Ab** における可算直積 $\mathbb{Z}^{\omega}$[*3]は，自由 Abel 群ではない．

Theorem 2.3. $\mathbf{Free}(\mathbb{Z})$ は (R2*) を満たさない正則圏である．

Proof. $\mathbf{Free}(\mathbb{Z})$ が cokernel を持たないことを示せばよい．まず，**Ab** における適当な右完全列

$$F_1 \xrightarrow{f} F_0 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^{\omega} \longrightarrow 0 \qquad \text{in } \mathbf{Ab} \tag{2}$$

であって，F_1, F_0 が自由 Abel 群であるものを取ることができる．f の $\mathbf{Free}(\mathbb{Z})$ における cokernel $F_0 \xrightarrow{q} F$ が存在したと仮定して，矛盾を導こう．(2) の普遍性から

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "g"'] & & F \\ & \mathbb{Z}^{\omega} \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd} \quad \text{in } \mathbf{Ab}$$

を可換にする一意的な射 h がとれる．一方，各射影 $\mathbb{Z}^{\omega} \xrightarrow{\pi_n} \mathbb{Z}$ について，$\xrightarrow{q} F$ の普遍性から

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "f"] & F_0 \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\pi_n g"'] & F \arrow[d, dashed, "k_n"] \\ & & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \quad \text{in } \mathbf{Free}(\mathbb{Z})$$

を可換にする k_n が一意に取れる．すると，g がエピであることから，各 n について次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & F \arrow[d, "k_n"] \\ \mathbb{Z}^{\omega} \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\pi_n"'] & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \quad \text{in } \mathbf{Ab}$$

すると，可換図式

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "(k_n)_{n<\omega}"] \\ \mathbb{Z}^{\omega} \arrow[ur, "h"] \arrow[r, equal] & \mathbb{Z}^{\omega} \end{tikzcd} \quad \text{in } \mathbf{Ab}$$

が得られるので，$\mathbb{Z}^{\omega}$ は F の直和因子である．ところが F は自由 Abel 群なので，これは Lemma 2.2 と矛盾する． □

References

[Bor94] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra. 2*. Vol. 51. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Categories and structures. Cambridge University Press, Cambridge, 1994 (cit. on p. 2).

[Ric] J. Rickard. *Cokernels in the category of free abelian groups*. Mathematics Stack Exchange. URL: https://math.stackexchange.com/q/765749.

[Sch] S. Schröer. *Baer's result: the infinite product of the integers has no basis*. URL: https://reh.math.uni-duesseldorf.de/~schroeer/publications_pdf/infinite_product-1.pdf (cit. on p. 3).

[*3] Baer-Specker 群として知られている．