

# 群の圏はグンカテゴリーである

Yuto Kawase

2023年12月19日

## 概要

本稿は圏論 Advent Calendar 2023 の 19 日目の記事です。ほとんどが普遍代数で、圏論要素は少なめです。

## 目次

Terminology	1
1 普遍代数/Universal algebra	1
1.1 代数理論/Algebraic theories	1
1.2 バラエティ/Varieties	2
1.3 自由代数/Free algebras	3
1.4 合同関係/Congruence	3
2 バラエティの分類/Classification of varieties	5
3 合同圏/Congruence-categories	8

## Terminology

$\mathbb{N}$	非負整数全体の集合
Set	小さい集合と写像の圏
Grp	(小さい) 群と群準同型の圏

## 1 普遍代数/Universal algebra

### 1.1 代数理論/Algebraic theories

**Definition 1.1** (シグネチャ). シグネチャ (signature) とは, 集合  $\Omega$  と写像  $\text{ar}: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  の組のこと.  $\Omega$  の元のことを関数記号 (function symbol) と呼ぶ. 各関数記号  $\omega \in \Omega$  について, 自然数  $\text{ar}(\omega)$  はそのアリティ (arity) と呼ばれる. 以下では, 単に  $\Omega$  と書いてシグネチャを表す. ◆

以下では, 可算無限集合  $\text{Var}$  を任意に取り固定する.  $\text{Var}$  の元は変数 (variable) と呼ばれ,  $x_1, x_2, y, z, \dots$  などの文字で書かれる.

**Definition 1.2** (文脈). 文脈 (context) とは, 相異なる有限個の変数からなる語  $(x_1, \dots, x_n)$  のこと.  $\vec{x}$  と書き, さらに  $n = 0$  の時は  $()$  と書く. ◆

**Definition 1.3** (項).  $\Omega$  をシグネチャとし,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  を文脈とする. 文脈  $\vec{x}$  における  $\Omega$ -項 ( $\Omega$ -term) は, 以下の規則によって再帰的に定義される:

- 各  $1 \leq i \leq n$  に対し,  $x_i \in \text{Var}$  は文脈  $\vec{x}$  における  $\Omega$ -項である.
- アリティ  $m$  の関数記号  $\omega \in \Omega$  と文脈  $\vec{x}$  における  $\Omega$ -項  $\tau_1, \dots, \tau_m$  が与えられたとき, 文字列  $\omega(\tau_1, \dots, \tau_m)$  は文脈  $\vec{x}$  における  $\Omega$ -項である.

文脈  $\vec{x}$  における  $\Omega$ -項は,  $\vec{x}.\tau$  や  $\tau(x_1, \dots, x_n)$  などと書かれる. 文脈  $(x_1, \dots, x_n)$  における  $\Omega$ -項は,  $n$  変数  $\Omega$ -項とも呼ばれる. ◆

**Definition 1.4** (等式).  $\Omega$  をシグネチャとする.  $\Omega$ -等式 ( $\Omega$ -equation) とは, 同一文脈における 2 つの  $\Omega$ -項  $\vec{x}.\tau, \vec{x}.\tau'$  の組のこと.  $\vec{x}.\tau = \vec{x}.\tau'$  や  $\tau = \tau', \tau(x_1, \dots, x_n) = \tau'(x_1, \dots, x_n)$  などと書かれる. ◆

**Definition 1.5** (代数理論). 代数理論 (algebraic theory) とは, シグネチャ  $\Omega$  と,  $\Omega$ -等式からなる集合  $E$  の組  $(\Omega, E)$  のこと. 代数理論は等式理論 (equational theory) とも呼ばれる. ◆

**Example 1.6** (群). 群の代数理論  $(\Omega, E)$  が, 以下のように定義される.

$$\Omega := \{e, i, m\}, \quad \text{ar}(e) := 0, \quad \text{ar}(i) := 1, \quad \text{ar}(m) := 2$$

$$E := \left\{ \begin{array}{l} m(m(x, y), z) \stackrel{x, y, z}{=} m(x, m(y, z)); \\ m(e, x) \stackrel{x}{=} x, \quad m(x, e) \stackrel{x}{=} x; \\ m(i(x), x) \stackrel{x}{=} e, \quad m(x, i(x)) \stackrel{x}{=} e \end{array} \right\}$$

ここで,  $m$  は群の 2 項演算,  $e$  は単位元,  $i$  は逆元をとる 1 項演算を表現している. ◆

## 1.2 バラエティ/Varieties

**Definition 1.7** (構造).  $\Omega$  をシグネチャとする.  $\Omega$ -構造 (structure)  $\mathbb{A}$  とは, 次のデータ

- 集合  $A$ ;
- すべての関数記号  $\omega \in \text{ar}^{-1}(n)$  に対する, 写像  $A^n \xrightarrow{[\omega]_{\mathbb{A}}} A$  の割り当て.

からなる組  $\mathbb{A} = (A, [\cdot]_{\mathbb{A}})$  のこと.  $\Omega$ -構造  $\mathbb{A} = (A, [\cdot]_{\mathbb{A}})$  に対し,  $A$  はその台集合と呼ばれる. ◆

**Definition 1.8.**  $\mathbb{A}$  を  $\Omega$ -構造とする. 割り当て  $\omega \mapsto [\omega]_{\mathbb{A}}$  は, 一般の  $\Omega$ -項に対する割り当てへと拡張される. 実際,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  を文脈としたとき, 以下の規則によって, 各  $\Omega$ -項  $\vec{x}.\tau$  に対し写像  $A^n \xrightarrow{[\vec{x}.\tau]_{\mathbb{A}}} A$  を割り当てることができる:

- 各  $1 \leq i \leq n$  に対し, 写像  $A^n \xrightarrow{[\vec{x}.x_i]_{\mathbb{A}}} A$  を  $i$  番目の射影と定める;
- アリティ  $m$  の関数記号  $\omega \in \Omega$  と文脈  $\vec{x}$  における  $\Omega$ -項  $\tau_1, \dots, \tau_m$  が与えられたとき, 写像  $A^n \xrightarrow{[\vec{x}.\omega(\tau_1, \dots, \tau_m)]_{\mathbb{A}}} A$  を

$$\vec{a} \mapsto [\omega]_{\mathbb{A}}([\vec{x}.\tau_1]_{\mathbb{A}}(\vec{a}), \dots, [\vec{x}.\tau_m]_{\mathbb{A}}(\vec{a}))$$

により定める. ◆

**Definition 1.9.**  $(\Omega, E)$  を代数理論とする.

- (i)  $\Omega$ -構造  $\mathbb{A}$  が  $\Omega$ -等式  $\tau(x_1, \dots, x_n) = \tau'(x_1, \dots, x_n)$  を満たすとは,  $[\vec{x}.\tau]_{\mathbb{A}}$  と  $[\vec{x}.\tau']_{\mathbb{A}}$  が同じ写像を定めていることを言う. このことを,  $\mathbb{A} \models \tau(x_1, \dots, x_n) = \tau'(x_1, \dots, x_n)$  と書き表す.

(ii)  $(\Omega, E)$ -代数 (algebra) とは,  $\Omega$ -構造  $\mathbb{A}$  であって  $E$  に属すすべての  $\Omega$ -等式を満たすものである.  $\blacklozenge$

**Definition 1.10** (準同型).  $(\Omega, E)$ -代数  $\mathbb{A}, \mathbb{B}$  に対し, 準同型 (homomorphism)  $\mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{B}$  とは, 台集合の間の写像  $A \xrightarrow{f} B$  であって任意の  $\omega \in \Omega$  について以下を可換にするものである:

$$\begin{array}{ccc} A^{\text{ar}(\omega)} & \xrightarrow{[\omega]_{\mathbb{A}}} & A \\ f^{\text{ar}(\omega)} \downarrow & & \downarrow f \\ B^{\text{ar}(\omega)} & \xrightarrow{[\omega]_{\mathbb{B}}} & B \end{array}$$

**Notation 1.11.** 代数理論  $(\Omega, E)$  に対し,  $(\Omega, E)$ -代数と準同型の成す圏を  $\mathbf{Alg}(\Omega, E)$  と書く. このような形で書ける圏のことを**バラエティ** (variety) と呼ぶ.  $\blacklozenge$

**Example 1.12.** 群のバラエティは群の圏と一致する. 実際,  $(\Omega, E)$  を群の代数理論 (Example 1.6) としたとき, 圏同型  $\mathbf{Alg}(\Omega, E) \cong \mathbf{Grp}$  が存在する.  $\blacklozenge$

### 1.3 自由代数/Free algebras

**Notation 1.13.**  $(\Omega, E)$  を代数理論とする. 任意の  $\mathbb{A} \in \mathbf{Alg}(\Omega, E)$  について  $\mathbb{A} \models \tau \stackrel{\text{def}}{=} \tau'$  が成り立つとき, このことを  $\mathbf{Alg}(\Omega, E) \models \tau \stackrel{\text{def}}{=} \tau'$  と書き表す.  $\blacklozenge$

代数理論  $(\Omega, E)$  に対し, 忘却関手  $\mathbf{Alg}(\Omega, E) \xrightarrow{U} \mathbf{Set}$  が,  $\mathbb{A} \mapsto A$  によって定義される. この関手  $U$  は左随伴  $\mathbb{F} \dashv U$  をもつことが知られており, 特に有限集合  $\{x_1, \dots, x_n\}$  のついで  $\mathbb{F}$  の値  $(\mathbb{F}(x_1, \dots, x_n)$  or  $\mathbb{F}_n$ ) は以下で与えられる:

**Remark 1.14.**  $(\Omega, E)$  を代数理論とし,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  を文脈とする. 文脈  $\vec{x}$  における  $\Omega$ -項全体を次の同値関係  $\sim$  で割った商集合を,  $F(x_1, \dots, x_n)$  と書くことにする:

$$\vec{x}.\tau \sim \vec{x}.\tau' \stackrel{\text{def}}{\iff} \tau \stackrel{\text{def}}{=} \tau'$$

$F(x_1, \dots, x_n)$  の元, すなわち  $\sim$  による同値類は,  $[\vec{x}.\tau]$  や  $[\tau]$  もしくは単に  $\tau$  などと書かれる. アリテ  $m$  の関数記号  $\omega \in \Omega$  に対し, well-defined な写像  $F(x_1, \dots, x_n)^m \rightarrow F(x_1, \dots, x_n)$  が

$$([\tau_1], \dots, [\tau_m]) \mapsto [\omega(\tau_1, \dots, \tau_m)]$$

によって定義できる. これにより,  $F(x_1, \dots, x_n)$  は  $(\Omega, E)$ -代数  $\mathbb{F}(x_1, \dots, x_n)$  となる.  $\blacklozenge$

### 1.4 合同関係/Congruence

**Definition 1.15** (合同関係).  $\mathbb{A}$  を  $(\Omega, E)$ -代数とする.  $\mathbb{A}$  上の**合同関係** (congruence) とは, 圏  $\mathbf{Alg}(\Omega, E)$  における内部同値関係 (internal equivalence relation) のことである. 明示的には, 台集合  $A$  上の同値関係  $\sim$  であって, 任意の  $\omega \in \Omega$  が与えられたとき,  $A$  の元の族が  $a_i \sim b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) をみたすなら

$$[\omega]_{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) \sim [\omega]_{\mathbb{A}}(b_1, \dots, b_n)$$

が成立するようなものである.  $\blacklozenge$

**Remark 1.16.**  $(\Omega, E)$ -代数  $\mathbb{A}$  上の合同関係  $\sim$  が与えられると, 台集合を  $\sim$  で割ることで新たな  $(\Omega, E)$ -代数  $\mathbb{A}/\sim$  を作ることができる.  $\blacklozenge$

**Remark 1.17.** 群  $G$  上の合同関係は  $G$  の正規部分群と 1 対 1 に対応し、環  $R$  上の合同関係は  $R$  の両側イデアルと 1 対 1 に対応する. ◆

**Notation 1.18.**  $\mathbb{A}$  を  $(\Omega, E)$ -代数とする.  $\mathbb{A}$  上の合同関係全体の集合を  $\text{Cong}(\mathbb{A})$  と書く.  $a \sim_0 a'$  から  $a \sim_1 a'$  が常に導かれるときに  $\sim_0 \leq \sim_1$  と定めることにより,  $\text{Cong}(\mathbb{A})$  を半順序集合とみなす. ◆

**Notation 1.19.**  $\alpha$  を  $\mathbb{A} \in \text{Alg}(\Omega, E)$  上の内部 2 項関係とする. このとき,  $\binom{a}{b} (= (a, b)) \in \alpha$  であることを

$$a \stackrel{\alpha}{\sim} b \quad \text{in } \mathbb{A}$$

と書き表す. ◆

**Notation 1.20.**  $\mathbb{A} \in \text{Alg}(\Omega, E)$  上の内部 2 項関係  $\alpha, \beta$  が与えられたとき,  $\mathbb{A}$  上の新たな内部 2 項関係  $\alpha \circ_n \beta$  ( $n \geq 0$ ) が, 以下で定義される:

$$\begin{aligned} \alpha \circ \beta \ni \binom{a}{b} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists c \in A \text{ s.t. } a \stackrel{\alpha}{\sim} c \stackrel{\beta}{\sim} b; \\ \alpha \circ_0 \beta \ni \binom{a}{b} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a = b; \\ \alpha \circ_{n+1} \beta &:= (\alpha \circ \beta) \circ (\alpha \circ_n \beta). \end{aligned}$$

2 項演算  $\circ$  は結合的であり, 特に  $\alpha \circ_1 \beta = \alpha \circ \beta$ ,  $\alpha \circ_2 \beta = \alpha \circ \beta \circ \alpha \circ \beta$ . ◆

**Remark 1.21.**  $\text{Cong}(\mathbb{A})$  は完備束である. 特に, 最小元  $0$ , 最大限  $1$ , 2 項 meet  $\alpha \wedge \beta$ , 2 項 join  $\alpha \vee \beta$  は次で与えられる:

$$\begin{aligned} a \stackrel{0}{\sim} b &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a = b; \\ a \stackrel{1}{\sim} b &\text{は常に成立}; \\ a \stackrel{\alpha \wedge \beta}{\sim} b &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \stackrel{\alpha}{\sim} b \text{ かつ } a \stackrel{\beta}{\sim} b; \\ a \stackrel{\alpha \vee \beta}{\sim} b &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists n \geq 0 \text{ s.t. } a \stackrel{\alpha \circ_n \beta}{\sim} b. \end{aligned}$$

**Notation 1.22.**  $\mathbb{A}$  を  $(\Omega, E)$ -代数とし,  $a, b \in A$  とする.  $\binom{a_0}{b_0}, \dots, \binom{a_n}{b_n} \in A \times A$  を含む合同関係のうち最小のものを,  $\langle \binom{a_0}{b_0}, \dots, \binom{a_n}{b_n} \rangle_{\mathbb{A}} \in \text{Cong}(\mathbb{A})$  と書くことにする. ◆

証明は省くが, 自由代数上の合同関係について次の補題が基本的である:

**Lemma 1.23.**  $(\Omega, E)$  を代数理論とする.  $\vec{x}$  を文脈とし,  $y_i, z_i \in \vec{x}$  ( $0 \leq i \leq n$ ) であるとする. このとき,

$$\left( \begin{array}{c} [\tau] \\ [\tau'] \end{array} \right) \in \left\langle \left( \begin{array}{c} [y_0] \\ [z_0] \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{c} [y_n] \\ [z_n] \end{array} \right) \right\rangle_{\mathbb{F}(\vec{x})} \Leftrightarrow \text{Alg}(\Omega, E) \models \tau[y_0/z_0, \dots, y_n/z_n] \stackrel{\vec{x}}{=} \tau'[y_0/z_0, \dots, y_n/z_n]$$

が成り立つ. ここで,  $\tau[y_0/z_0, \dots, y_n/z_n]$  は項  $\tau$  に表れる変数のうち各  $z_i$  を  $y_i$  へ一斉に置き換えて得られる項を指す.

**Notation 1.24.** 項  $\tau(x_0, x_1, x_2)$  に表れる変数のうち  $x_2$  を  $x_1$  へ置き換えたものを,  $\tau(x_0, x_1, x_1)$  と書くことにする. このような記法を用いると, **Lemma 1.23** は例えば

$$\left( \begin{array}{c} [\tau] \\ [\tau'] \end{array} \right) \in \left\langle \left( \begin{array}{c} [y] \\ [z] \end{array} \right) \right\rangle_{\mathbb{F}(x, y, z)} \Leftrightarrow \text{Alg}(\Omega, E) \models \tau(x, y, y) = \tau'(x, y, y)$$

のように表現できる. ◆

## 2 バラエティの分類/Classification of varieties

**Definition 2.1.** バラエティ  $\mathbf{Alg}(\Omega, E)$  は, 以下 (Theorem 2.2) の同値な条件を満たすときマルセフバラエティ (Maltsev variety) と呼ばれる.  $\blacklozenge$

**Theorem 2.2.** 代数理論  $(\Omega, E)$  について, 以下は同値である:

- (i) 任意の  $\mathbb{A} \in \mathbf{Alg}(\Omega, E)$  と  $\alpha, \beta \in \text{Cong}(\mathbb{A})$  に対し,  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ . (congruence-permutable)
- (ii) ある 3 変数  $\Omega$ -項  $q$  (Maltsev term) が存在し, 任意の  $(\Omega, E)$ -代数が以下の等式を満たす:

$$x = q(x, y, y), \quad q(x, x, y) = y.$$

- (iii)  $\mathbf{Alg}(\Omega, E)$  の任意の内部反射的關係 (internal reflexive relation) が合同關係である.

*Proof.* [(i)  $\implies$  (ii)]  $\mathbb{F}_3 := \mathbb{F}(x, y, z) \in \mathbf{Alg}(\Omega, E)$  を 3 元生成自由代数とする.

$$\alpha := \langle \left( \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \rangle_{\mathbb{F}_3}, \quad \beta := \langle \left( \begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix} \right) \rangle_{\mathbb{F}_3} \quad \text{in } \text{Cong}(\mathbb{F}_3)$$

とおく.  $\left( \begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$  なので, ある 3 変数項  $q \in \mathbb{F}_3$  が存在して

$$x \xrightarrow{\beta} q \xrightarrow{\alpha} z \quad \text{in } \mathbb{F}_3.$$

すると Lemma 1.23 より,

$$\mathbf{Alg}(\Omega, E) \models x = q(x, y, y);$$

$$\mathbf{Alg}(\Omega, E) \models q(x, x, z) = z.$$

したがって, この 3 変数項  $q(x, y, z)$  は (ii) の条件を満たしている.

[(ii)  $\implies$  (iii)]  $\alpha$  を  $\mathbb{A} \in \mathbf{Alg}(\Omega, E)$  上の内部反射的關係とする.  $a \xrightarrow{\alpha} b$  なら

$$b = \llbracket q \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, a, b) \xrightarrow{\alpha} \llbracket q \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, b) = a.$$

$a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\alpha} c$  なら

$$a = q(a, b, b) \xrightarrow{\alpha} q(b, b, c) = c.$$

よって  $\alpha$  は対称律と推移律をみたす, すなわち合同關係である.

[(iii)  $\implies$  (i)]  $\alpha, \beta \in \text{Cong}(\mathbb{A})$  を任意にとる.  $\alpha \circ \beta$  は反射的な内部關係なので, 仮定より対称的でもある. したがって  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$  を得る.  $\square$

**Example 2.3.** 群のバラエティはマルセフバラエティである. 実際, 3 変数項  $q(x, y, z) := xy^{-1}z$  が Theorem 2.2(ii) の条件を満たす.  $\blacklozenge$

**Definition 2.4.** バラエティ  $\mathbf{Alg}(\Omega, E)$  は, 以下 (Theorem 2.5) の同値な条件を満たすときモジュラーバラエティ (modular variety, or congruence-modular variety) と呼ばれる.  $\blacklozenge$

**Theorem 2.5** ([Day69; Gum83]). 代数理論  $(\Omega, E)$  について, 以下は同値である:

- (i) 任意の  $\mathbb{A} \in \mathbf{Alg}(\Omega, E)$  に対し,  $\text{Cong}(\mathbb{A})$  がモジュラー則 (modular law) を満たす. すなわち,  $\alpha, \beta, \gamma \in \text{Cong}(\mathbb{A})$  に対し,  $\gamma \leq \alpha$  ならば  $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \leq (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$  が成り立つ.

(ii) ある 4 変数  $\Omega$ -項  $p_0, p_1, \dots, p_n$  (Day term) が存在し、任意の  $(\Omega, E)$ -代数が以下の等式を満たす:

$$\begin{aligned} p_i(x, y, y, x) &= x & (0 \leq i \leq n); \\ p_0(x, y, z, w) &= x; \\ p_i(x, x, y, y) &= p_{i+1}(x, x, y, y) & (i: \text{偶数}); \\ p_i(x, y, y, z) &= p_{i+1}(x, y, y, z) & (i: \text{奇数}); \\ p_n(x, y, z, w) &= w. \end{aligned}$$

(iii) 任意の  $\mathbb{A} \in \mathbf{Alg}(\Omega, E)$  がシフト補題 (Shifting Lemma) を満たす. すなわち,  $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$  なる  $\alpha, \beta, \gamma \in \text{Cong}(\mathbb{A})$  に対し,  $(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}) \in \alpha$ ,  $(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} y \\ w \end{smallmatrix}) \in \beta$ ,  $(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}) \in \gamma$  ならば  $(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}) \in \gamma$  が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\beta} & z \\ \gamma \downarrow \alpha & & \alpha \downarrow \\ y & \xrightarrow{\beta} & w \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\beta} & z \\ \gamma \downarrow \alpha & & \alpha \downarrow \\ y & \xrightarrow{\beta} & w \end{array} \gamma \text{ in } \mathbb{A} \end{array}$$

*Proof.* [(i)  $\implies$  (iii)]  $\mathbb{A} \in \mathbf{Alg}(\Omega, E)$  を任意にとる.  $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$  なる  $\alpha, \beta, \gamma \in \text{Cong}(\mathbb{A})$  について, 以下の状況を考える:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\beta} & z \\ \gamma \downarrow \alpha & & \alpha \downarrow \\ y & \xrightarrow{\beta} & w \end{array} & \text{in } \mathbb{A}. \end{array}$$

モジュラー則より,  $(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}) \in \alpha \wedge (\beta \vee (\alpha \wedge \gamma)) \leq (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \leq \gamma \vee (\alpha \wedge \gamma) = \gamma$  が成り立つ.

[(iii)  $\implies$  (ii)]  $\mathbb{F}_4 := \mathbb{F}(x, y, z, w) \in \mathbf{Alg}(\Omega, E)$  を 4 元生成自由代数とする.

$$\begin{aligned} \alpha &:= \langle \langle \begin{smallmatrix} x \\ w \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix} \rangle \rangle_{\mathbb{F}_4}, & \beta &:= \langle \langle \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix} \rangle \rangle_{\mathbb{F}_4}, & \gamma &:= \langle \langle \begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix} \rangle \rangle_{\mathbb{F}_4} \in \text{Cong}(\mathbb{F}_4); \\ \delta &:= (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \in \text{Cong}(\mathbb{F}_4) \end{aligned}$$

とおく. すると  $\alpha \wedge \beta \leq \delta$  であり

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} y & \xrightarrow{\beta} & x \\ \delta \downarrow \alpha & & \alpha \downarrow \\ z & \xrightarrow{\beta} & w \end{array} & \text{in } \mathbb{F}_4 \end{array}$$

なので, シフト補題より  $(\begin{smallmatrix} x \\ w \end{smallmatrix}) \in \delta$  を得る.  $\delta$  の定義より, ある  $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{F}_4$  が存在し以下を満たす:

$$\mathbf{Alg}(\Omega, E) \models x = p_0(x, y, z, w); \tag{1}$$

$$\mathbf{Alg}(\Omega, E) \models w = p_n(x, y, z, w); \tag{2}$$

$$\langle \begin{smallmatrix} p_i \\ p_{i+1} \end{smallmatrix} \rangle \in \alpha \wedge \beta \quad (i: \text{偶数}); \tag{3}$$

$$\langle \begin{smallmatrix} p_i \\ p_{i+1} \end{smallmatrix} \rangle \in \gamma \quad (i: \text{奇数}). \tag{4}$$

Lemma 1.23 より, (3) は

$$\mathbf{Alg}(\Omega, E) \models p_i(x, y, y, x) = p_{i+1}(x, y, y, x) \quad (i: \text{偶数}); \tag{5}$$

$$\mathbf{Alg}(\Omega, E) \models p_i(x, x, y, y) = p_{i+1}(x, x, y, y) \quad (i: \text{偶数}) \tag{6}$$

と同値であり, (4) は

$$\mathbf{Alg}(\Omega, E) \models p_i(x, y, y, z) = p_{i+1}(x, y, y, z) \quad (i: \text{奇数}) \tag{7}$$

と同値である. (1),(5),(7) から  $x = p_i(x, y, y, x) (\forall i)$  が従うので,  $p_0, \dots, p_n$  は (ii) の条件を満たしている.

[(ii)  $\implies$  (i)]  $\alpha, \beta, \gamma \in \text{Cong}(\mathbb{A})$  が  $\gamma \leq \alpha$  を満たしているとする.

$$\alpha \cap (\beta \circ_n \gamma) \subseteq (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \quad (8)$$

を  $n \geq 0$  についての帰納法で示す ( $n = 0$  なら明らか).  $(\begin{smallmatrix} a \\ d \end{smallmatrix}) \in \alpha \cap (\beta \circ_{n+1} \gamma)$  を任意に取る. ある  $b, c \in \mathbb{A}$  が存在して  $(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}) \in \beta, (\begin{smallmatrix} b \\ c \end{smallmatrix}) \in \gamma, (\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}) \in \beta \circ_n \gamma$  を満たす.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\beta} & b \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \gamma \\ d & \xrightarrow{\beta \circ_n \gamma} & c \end{array} \text{ in } \mathbb{A}$$

### Claim 1

- (i)  $\llbracket p_i \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, c, d) \xrightarrow{(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma} \llbracket p_i \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, a, d, d)$ .
- (ii)  $i$  が偶数なら,  $\llbracket p_i \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, c, d) \xrightarrow{(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma} \llbracket p_{i+1} \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, c, d)$ .
- (iii)  $i$  が奇数なら,  $\llbracket p_i \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, c, d) \xrightarrow{\gamma} \llbracket p_{i+1} \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, c, d)$ .

*Proof.*

(i)

$$\begin{array}{ccc} & \llbracket p_i \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, b, a) = a = \llbracket p_i \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, a, a, a) & \\ & \swarrow \alpha \qquad \qquad \qquad \searrow \alpha & \\ \llbracket p_i \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, c, d) & \xrightarrow{\beta \circ_n \gamma} & \llbracket p_i \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, a, d, d) \end{array}$$

よって, 帰納法の仮定から従う.

- (ii) (i) より,  $\llbracket p_i \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, c, d) \xrightarrow{(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma} \llbracket p_i \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, a, d, d) = \llbracket p_{i+1} \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, a, d, d) \xrightarrow{(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma} \llbracket p_{i+1} \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, c, d)$ .
- (iii)  $\llbracket p_i \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, c, d) \xrightarrow{\gamma} \llbracket p_i \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, b, d) = \llbracket p_{i+1} \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, b, d) \xrightarrow{\gamma} \llbracket p_{i+1} \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, c, d)$ .  $\square$

Claim 1(ii)(iii) より,

$$a = \llbracket p_0 \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, c, d) \xrightarrow{(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma} \llbracket p_1 \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, c, d) \xrightarrow{\dots} \llbracket p_n \rrbracket_{\mathbb{A}}(a, b, c, d) = d.$$

よって  $n+1$  についての (8) が示された.  $\square$

以下で示す通り, モジュラーバラエティの概念はマルセフバラエティを包含する.

**Theorem 2.6.** バラエティ  $\mathbf{Alg}(\Omega, E)$  について, (i)  $\implies$  (ii)  $\implies$  (iii) が成立する.

- (i)  $\mathbf{Alg}(\Omega, E)$  はマルセフバラエティである.
- (ii)  $\mathbf{Alg}(\Omega, E)$  は 3-permutable バラエティである. すなわち, 任意の  $\mathbb{A} \in \mathbf{Alg}(\Omega, E)$  と  $\alpha, \beta \in \text{Cong}(\mathbb{A})$  に対し,  $\alpha \circ \beta \circ \alpha = \beta \circ \alpha \circ \beta$  が成立する.
- (iii)  $\mathbf{Alg}(\Omega, E)$  はモジュラーバラエティである.

*Proof.* [(i)  $\implies$  (ii)] マルセフバラエティの定義 Theorem 2.2(i) から直ちに従う.

[(ii)  $\implies$  (iii)] シフト補題 (Theorem 2.5(iii)) が成立することを示そう.  $\mathbb{A} \in \mathbf{Alg}(\Omega, E)$  を任意にとり,  $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$

なる  $\alpha, \beta, \gamma \in \text{Cong}(\mathbb{A})$  について以下の状況を考える:

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\beta} & z \\ \alpha \wedge \gamma \downarrow & & \downarrow \alpha \\ y & \xrightarrow{\beta} & w \end{array} \text{ in } \mathbb{A}.$$

仮定より  $(\frac{z}{w}) \in \beta \circ (\alpha \wedge \gamma) \circ \beta = (\alpha \wedge \gamma) \circ \beta \circ (\alpha \wedge \gamma)$  なので, 以下のような  $u, v \in A$  が存在する:

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\beta} & & & z \\ & & & \alpha \wedge \gamma & \\ & & u & & \\ \alpha \wedge \gamma \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \alpha \\ & & v & & \\ y & \xrightarrow{\beta} & & & w \end{array} \text{ in } \mathbb{A}.$$

すると  $u \xrightarrow{\alpha} z \xrightarrow{\alpha} w \xrightarrow{\alpha} v$  なので  $(\frac{u}{v}) \in \alpha \wedge \beta \leq \gamma$  である. したがって  $z \xrightarrow{\gamma} w$  が言えた. □

### 3 合同圏/Congruence-categories

[Theorem 2.2\(iii\)](#) と [Theorem 2.5\(iii\)](#) は, 有限極限をもつ任意の圏で意味をなす. したがって, マルセフバラエティやモジュラーバラエティの概念を圏へ一般化することができる.

**Definition 3.1.**

- (i) 圏  $\mathcal{C}$  がマルセフ圏 (Maltsev category) であるとは,  $\mathcal{C}$  が有限極限をもち, なおかつ任意の内部反射的關係が内部同値關係であることを言う.
- (ii) 圏  $\mathcal{C}$  がグン圏 (Gumm category) であるとは,  $\mathcal{C}$  が有限極限を持ち, なおかつ内部同値關係についてシフト補題 ([Theorem 2.5\(iii\)](#)) が成立すること言う. ◆

**Remark 3.2.** バラエティは常に有限極限を持つので, バラエティについて, マルセフ圏であることとマルセフバラエティであることは同値である. 同様に, バラエティについて, グン圏であることとモジュラーバラエティであることは同値である. 特に [Example 2.3](#) と [Theorem 2.6](#) より, 群の圏  $\text{Grp}$  はグン圏である! ◆

マルセフバラエティの特徴づけ [Theorem 2.2](#) では, 内部2項關係の「合成」 $\alpha \circ \beta$  を用いている. このような「合成」の概念は一般の正則圏 (regular category) で意味を成し, 実際 [Theorem 2.6](#) を次のように一般化することができる.

**Theorem 3.3.** 任意の正則マルセフ圏 (regular Maltsev category) はグン圏である. <sup>\*1</sup>

マルセフバラエティやモジュラーバラエティの概念が圏へ一般化されたことで, 位相代数や順序代数, quasi-バラエティなどの, バラエティとは限らない類似概念が扱えるようになる. 実際,  $C^*$ -代数, コンパクト群, 位相群, 振れなしアーベル群, 被約可換環, 任意のトポスの反対圏, 任意のアーベル圏などは, バラエティでないマルセフ圏の例である. [[GRN19](#)]

<sup>\*1</sup> [Theorem 2.6\(ii\)](#) における 3-permutable バラエティの概念の圏への一般化も知られており, それはグルサ圏 (Goursat category) と呼ばれる. [Theorem 3.3](#) の主張は「正則マルセフ圏  $\implies$  正則グルサ圏  $\implies$  グン圏」のように精密化される.



## References

- [Ber12] C. Bergman. *Universal Algebra*. Vol. 301. Pure and Applied Mathematics (Boca Raton). Fundamentals and selected topics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2012.
- [Bou04] D. Bourn. “Fibration of points and congruence modularity”. In: *Algebra Universalis* 52.4 (2004), pp. 403–429.
- [Bou22] D. Bourn. “On congruence modular varieties and Gumm categories”. In: *Comm. Algebra* 50.6 (2022), pp. 2377–2407.
- [Day69] A. Day. “A characterization of modularity for congruence lattices of algebras”. In: *Canad. Math. Bull.* 12 (1969), pp. 167–173 (cit. on p. 5).
- [Fre+22] R. S. Freese et al. *Algebras, Lattices, Varieties. Vol. II*. Vol. 268. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2022.
- [GRN19] M. Gran, D. Rodelo, and I. T. Nguéfeu. “Variations of the shifting lemma and Goursat categories”. In: *Algebra Universalis* 80.1 (2019), Paper No. 2, 12 (cit. on p. 8).
- [Gum83] H. P. Gumm. “Geometrical methods in congruence modular algebras”. In: *Mem. Amer. Math. Soc.* 45.286 (1983), pp. viii+79 (cit. on p. 5).