終対象はいつ有限表示か

Yuto Kawase

2024 年 12 月 5 日

概要

終対象が有限表示になるための条件を調べます．本稿は圏論 Advent Calendar 2024 の 5 日目の記事です．

目次

Terminology

$\mathbf{Set}$	小さい集合と写像の圏
$\mathbf{1}$	終圏 (terminal category)
1	1 点集合, 終対象
$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$	圏 $\mathscr{C}$ の反対圏
$\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$	圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への関手圏
$\mathrm{Ob}\mathscr{C}$	圏 $\mathscr{C}$ の対象のなすクラス
$C \in \mathscr{C}$	$C \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$ の意
$\mathrm{Mor}\mathscr{C}$	圏 $\mathscr{C}$ の射のなすクラス
$\mathscr{C}(X,Y)$	圏 $\mathscr{C}$ の Hom クラス
$X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathscr{C}$	$f \in \mathscr{C}(X,Y)$ の意
D/F	関手 $\mathbf{1} \xrightarrow{D} \mathscr{D} \xleftarrow{F} \mathscr{C}$ についてのコンマ圏 $(D \Rightarrow F)$
よ	米田埋め込み
$\pi_0(\mathscr{C})$	圏 $\mathscr{C}$ の連結成分のなすクラス
$\mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}$	κ-表示可能対象のなす $\mathscr{A}$ の充満部分圏

1 はじめに

Categories in Tokyo 第 1 回集会で行われた未解決問題セッションにて, 次のような問題が提示された:

"代数の圏の終対象はいつ有限表示か?"

本稿ではこの問題を少し一般化し, "代数の圏" として局所 κ-表示可能圏 (特に前層圏) を考え, 終対象が κ-表示可能になるための条件を調べる. また, 本稿では [Kaw24] の用語をいくつか流用している.

2 終対象の表示可能性: 前層圏の場合

Set において κ-極限と κ-フィルター余極限は可換であり, 更にこの可換性は κ-フィルター余極限を特徴づけることが知られている.*1 次の定理は, 双対的に κ-フィルター余極限との可換性が κ-極限を特徴づけると主張している.

Theorem 2.1. *2 小圏 $\mathbf{I}$ について次は同値.

(i) 終対象 $1 \in \mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\mathrm{op}}}$ が κ-表示可能.

(ii) **Set** において $\mathbf{I}^{\mathrm{op}}$ 型極限と κ-フィルター (小) 余極限が可換.

(iii) ある κ-小圏 $\mathbf{J}$ と終関手 $\mathbf{J} \to \mathbf{I}$ が存在する.

Proof. [(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)] 終対象が表現する関手 $\mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\mathrm{op}}}(1, -)$ は, $\mathbf{I}^{\mathrm{op}}$ 型極限をとる関手 $\mathrm{Lim}_{\mathbf{I}^{\mathrm{op}}}$ と自然同型である. よって主張が従う.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\mathrm{op}}} \arrow[r, shift left=2, "\mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\mathrm{op}}}(1,-)"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{Lim}_{\mathbf{I}^{\mathrm{op}}}"'] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

[(iii) $\Longrightarrow$ (ii)] 仮定より $\mathbf{I}^{\mathrm{op}}$ 型極限は κ-極限へ帰着されるので, **Set** において κ-極限と κ-フィルター (小) 余極限が可換であることから従う.

[(i) $\Longrightarrow$ (iii)] Fact A.7 より, 終対象 $1 \in \mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\mathrm{op}}}$ は表現可能関手の κ-余極限で書くことができる. すなわち, ある κ-小圏 $\mathbf{J}$ と関手 $\mathbf{J} \xrightarrow{F} \mathbf{I}$ が存在して,

$$\mathrm{Colim}(\mathbf{J} \xrightarrow{F} \mathbf{I} \xrightarrow{よ} \mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\mathrm{op}}}) \cong 1 \quad \text{in } \mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\mathrm{op}}} \tag{1}$$

が成り立つ. 一方で, 各 $I \in \mathbf{I}$ に対し

$$(\mathrm{Colim}\ よ \circ F)(I) \cong \underset{J \in \mathbf{J}}{\mathrm{Colim}}\, \mathbf{I}(I, FJ) \cong \pi_0(I/F) \quad \text{in } \mathbf{Set}$$

と計算できるので, (1) より $\pi_0(I/F) \cong 1$ を得る. したがって F は終関手である. □

3 終対象の表示可能性: 局所表示可能圏の場合

Lemma 3.1. 局所小圏の間の随伴

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left=2, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{B} \arrow[l, shift left=2, "G"] \end{tikzcd}$$

を考え, G が $\mathscr{B}$ に存在する任意の κ-フィルター (小) 余極限を保つと仮定する. このとき, 任意の $A \in \mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}$ について $FA \in \mathscr{B}_{\kappa\mathsf{p}}$ が成立する.

*1 このことは, 例えば [Kaw24] で扱われている.

*2 同様の主張が [Par90, Proposition 7] に書かれているが, その証明にギャップがあるため, 本稿では別の証明を付けた.

Proof. 随伴から $\mathscr{B}(FA,-) \cong \mathscr{A}(A,G-)$ であり, これは $\mathscr{B}$ に存在する任意の κ-フィルター (小) 余極限を保つ. □

Theorem 3.2. 局所 κ-表示可能圏 $\mathscr{A}$ について, 次は同値.

(i) 終対象 $1 \in \mathscr{A}$ が κ-表示可能.
(ii) $\mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}$ が終対象を持つ.
(iii) ある κ-小圏 $\mathbf{J}$ と終関手 $\mathbf{J} \to \mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}$ が存在する.
(iv) $\mathbf{Set}$ において ${\mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}}^{\mathrm{op}}$ 型極限と κ-フィルター (小) 余極限が可換.

Proof. [(i) $\Longrightarrow$ (ii)] 明らか.
[(ii) $\Longrightarrow$ (iii)] 終対象 $1 \in \mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}$ を選択する, 終圏からの関手 $\mathbf{1} \xrightarrow{\ulcorner 1 \urcorner} \mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}$ を考える. 任意の $A \in \mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}$ についてコンマ圏 $A/\ulcorner 1 \urcorner \cong \mathbf{1}$ は連結なので, $\mathbf{1} \xrightarrow{\ulcorner 1 \urcorner} \mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}$ は終関手である.
[(iii) $\Longrightarrow$ (iv)] 仮定より ${\mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}}^{\mathrm{op}}$ 型極限は κ-極限へ帰着されるので, $\mathbf{Set}$ において κ-極限と κ-フィルター (小) 余極限が可換であることから従う.
[(iv) $\Longrightarrow$ (i)] Fact A.6 より, 随伴

$$\mathbf{Set}^{{\mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}}^{\mathrm{op}}} \underset{I}{\overset{R}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathscr{A}$$

であって, I が充満忠実かつ κ-フィルター (小) 余極限を保つものが存在する. 終対象 $1 \in \mathscr{A}$ を考える. $I(1) \in \mathbf{Set}^{{\mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}}^{\mathrm{op}}}$ は終対象であり, Theorem 2.1 より κ-表示可能である. したがって Lemma 3.1 より, $1 \cong RI(1) \in \mathscr{A}$ も κ-表示可能である. □

付録/Appendix

A　局所表示可能圏

以下, 正則無限基数 κ を固定する.

Definition A.1. 局所小圏 $\mathscr{A}$ の対象 $A \in \mathscr{A}$ が κ-**表示可能** (κ-presentable) であるとは, 関手

$$\mathscr{A} \xrightarrow{\mathscr{A}(A,-)} \mathbf{Set}$$

が, $\mathscr{A}$ に存在する任意の κ-フィルター (小) 余極限を保つことを言う. ♦

Notation A.2. κ-表示可能対象のなす $\mathscr{A}$ の充満部分圏を $\mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}} \subseteq \mathscr{A}$ と書く. ♦

Definition A.3. 局所小圏 $\mathscr{A}$ が**局所** κ-**表示可能** (locally κ-presentable) であるとは, 以下を満たすことを言う.

- $\mathscr{A}$ は (小) 余完備.
- 小さい集合 $\mathrm{G} \subseteq \mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}$ が存在して, $\mathscr{A}$ の任意の対象が G の対象の κ-フィルター (小) 余極限で書ける. ♦

Definition A.4. 圏 $\mathscr{C}$ が κ-**小** (κ-small) であるとは, 射のクラス $\mathrm{Mor}\mathscr{C}$ の濃度が κ 未満であることをいう. 図式圏が κ-小な (余) 極限を κ-*(***余***)* **極限**という. ♦

Notation A.5. κ-極限を持つ圏 $\mathscr{C}$ に対し, κ-極限を保つ関手 $\mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ と自然変換のなす圏を $\mathbf{Cts}_\kappa(\mathscr{C}, \mathbf{Set})$ と書く. ♦

Fact A.6. 局所 κ-表示可能圏 $\mathscr{A}$ に対し, 以下が成立する.

(i) $\mathscr{A}$ は (小) 完備.

(ii) $\mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}$ は本質的小, すなわち, ある小圏と圏同値.

(iii) $\mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}} \subseteq \mathscr{A}$ は κ-余極限で閉じる.

(iv) 圏同値 $\mathscr{A} \simeq \mathbf{Cts}_\kappa({\mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ が存在する.

(v) 包含関手 $\mathbf{Cts}_\kappa({\mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}) \subseteq \mathbf{Set}^{{\mathscr{A}_{\kappa\mathsf{p}}}^{\mathrm{op}}}$ は左随伴を持ち, さらに κ-フィルター (小) 余極限で閉じている. ♦

Proof. [AR94] を参照すると良い. 日本語で読める [サクラ 24] も参考になる. □

Fact A.7. 小圏 $\mathbf{I}$ について前層圏 $\mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\mathrm{op}}}$ は局所 κ-表示可能である. さらに, 前層 $P \in \mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\mathrm{op}}}$ について次は同値.

(i) $P \in \mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\mathrm{op}}}$ が κ-表示可能.

(ii) $\mathbf{Set}^{\mathbf{I}^{\mathrm{op}}}$ において, P が表現可能関手の κ-余極限で書ける. ♦

Proof. [AR94] が参考になる. □

References

[AR94] J. Adámek and J. Rosický. *Locally presentable and accessible categories.* Vol. 189. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. DOI: `10.1017/CBO9780511600579` (cit. on p. 4).

[Kaw24] Y. Kawase. **極限と余極限の交換**. 圏論 Advent Calendar 2024 4 日目. 2024. URL: `https://ykawase5048.github.io/yutokawase/notes/CommLimColim.pdf` (cit. on p. 2).

[Par90] R. Paré. “Simply connected limits”. In: *Canad. J. Math.* 42.4 (1990), pp. 731–746. DOI: `10.4153/CJM-1990-038-6` (cit. on p. 2).

[サクラ 24] サクラ. **到達可能圏・局所表示可能圏のーと**. 圏論 Advent Calendar 2024 1 日目. 2024. URL: `https://drive.google.com/file/d/1y9m5x4ssaOY_iu2NQamUJTjv_bGa21NF` (cit. on p. 4).